

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ
(ЧАСТЬ II)

Хабаровск 2003

*Министерство образования Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Хабаровский государственный технический университет”*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ
(ЧАСТЬ II)

Методические указания по курсу
“Соппротивление материалов”
для студентов строительных специальностей
заочной формы обучения

*Хабаровск
Издательство ХГТУ
2003*

УДК 539.3/(076)

Примеры решения задач по сопротивлению материалов (часть II): Методические указания по курсу "Сопротивление материалов" для студентов строительных специальностей заочной формы обучения /Сост. Л. М. Иванов. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2003. – 20 с.

Методические указания составлены на кафедре "Механика деформируемого твердого тела". В работе приводятся примеры решения типовых задач из контрольных работ по сопротивлению материалов для студентов заочной формы обучения по второй части курса "Сопротивление материалов".

Печатается в соответствии с решениями кафедры " Механика деформируемого твёрдого тела " и методического совета заочного факультета.

© Издательство Хабаровского
государственного технического
университета, 2003

Министерство образования Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Хабаровский государственный технический университет”

Утверждаю в печать
Ректор университета

д-р техн. наук _____ С. Н. Иванченко
" ____ " _____ 2003 г.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ
(ЧАСТЬ II)

Методические указания по курсу “Соппротивление материалов”
для студентов строительных специальностей заочной формы обуче-
ния

Составил: Иванников Л. М.

Рассмотрены и рекомендованы к изданию кафедрой
“Механика деформируемого твёрдого тела”.
Зав. кафедрой, доцент, к.т.н. _____ (Шишкин А. И.)
" ____ " _____ 2001

Рассмотрены и рекомендованы к изданию
методическим советом заочного факультета
Председатель совета _____ (Вайнер Л. Г.)
" ____ " _____ 2003

Нормоконтролер доцент, к.т.н. _____ (Вайсфельд А. А.)

Хабаровск
Издательство ХГТУ
2003

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ
(ЧАСТЬ II)

Хабаровск 2003

Министерство образования Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Хабаровский государственный технический университет”

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ
(ЧАСТЬ II)

Методические указания по курсу
“Сопротивление материалов”
для студентов строительных специальностей
заочной формы обучения

Хабаровск
Издательство ХГТУ
2003

ВВЕДЕНИЕ

Во второй части курса сопротивления материалов студенты изучают вопросы, связанные с расчетом элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при более сложных видах загрузки. Изучение таких вопросов сложного сопротивления начинают обычно с косоугольного изгиба. Нейтральная линия при косоугольном изгибе уже не перпендикулярна плоскости внешних сил, а плоскость, в которой расположены прогибы, при косоугольном изгибе не совпадает с плоскостью внешних сил. Балки, имеющие сечения со значительно различающимися друг от друга главными центральными моментами инерции, хорошо работают на изгиб в плоскости наибольшей жесткости, но даже при небольших углах наклона к плоскости наибольшей жесткости в балках возникают значительные дополнительные напряжения и деформации. Для балки круглого поперечного сечения косоугольный изгиб невозможен, так как любая центральная ось является главной.

При определении напряжений в случае внецентренного растяжения необходимо знать положение главных центральных осей инерции сечения, так как от этих осей отсчитываются расстояния точки приложения силы и точки, в которых определяют напряжения. Следует обратить внимание на то, что приложенная эксцентрично сжимающая сила может вызвать в поперечном сечении бруса растягивающие напряжения. В связи с этим внецентренное сжатие особо опасно для брусков из хрупких материалов (чугун, бетон), которые слабо сопротивляются растягивающим усилиям.

В случае изгиба с кручением в сечении бруса возникают нормальные и касательные напряжения. В опасных точках сечения реализуется плоское напряженное состояние. В связи с этим проверка на прочность производится с применением гипотез прочности. Для пластичных материалов обычно используют третью и четвертую гипотезы прочности.

В заключение следует изучить общий случай сложного сопротивления, когда брус испытывает одновременно растяжение (сжатие), изгиб в двух плоскостях и кручение.

Следующая очень важная тема курса - устойчивость равновесия деформируемых систем (продольный изгиб бруса). Опасность явления потери устойчивости заключается в том, что оно может наступить при напряжении значительно меньшем предела прочности материала. Это напряжение называется критическим. Для стержней большой гибкости оно определяется по формуле Л. Эйлера, для стержней малой гибкости – по формуле Ф. С. Ясинского. Практический расчет брусков на продольный изгиб проводится методом последовательных приближений с использованием коэффициента снижения допускаемых напряжений φ , который приводится в соответствующих таблицах.

Действию динамической нагрузки посвящен раздел курса: расчеты на удар. Особенностью этого типа динамических задач является то, что учесть силы инерции невозможно, так как неизвестна продолжительность удара. Напряжения при ударе вычисляют, приравнявая кинетическую энергию ударяющего тела потенциальной энергии деформации бруса, воспринимающего удар. Для решения практических задач прикладной теории удара в сопротивлении материалов используется динамический коэффициент. Следует иметь в виду, что напряжения при ударе, зависят не только от площади поперечного сечения бруса, но и от его длины и модуля упругости материала. При увеличении податливости элемента конструкции увеличивается величина пе-

ремещений в точке соударения падающего груза и элемента конструкции. Это приводит к уменьшению напряжений в сечении бруса.

Библиографический список

1. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1995. 560 с.
2. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа. 1989. 624 с.
3. Костенко Н. А., Балясникова С. В. и др. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 2000. 430 с.
4. Дарков А. В., Кутуков Б. Н. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-строительных специальностей высших учебных заведений. М.: Высшая школа, 1983. 56 с.
5. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. В. К. Качурина, М.: Высшая школа, 1972. 333 с.
6. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. А. С. Вольмира. М.: Наука, 1984. 408 с.
7. Алмаметов Ф. З., Арсеньев С. И. и др. Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1992. 320 с.

1. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Сложным сопротивлением называется такой случай нагружения бруса, при котором в его поперечном сечении возникает более двух внутренних силовых факторов. Для определения напряжений в точках поперечного сечения бруса в случае сложного сопротивления используется принцип независимости действия сил. Напряжение определяется как алгебраическая сумма напряжений от действия каждой нагрузки в отдельности. Таким образом, сложное сопротивление можно рассматривать как результат действия нескольких простых сопротивлений. Формулы для определения напряжений для основных видов простого сопротивления рассматриваются в первой части курса сопротивления материалов. В контрольных работах студентам-заочникам строительных специальностей предлагается решить две задачи по следующим разделам сложного сопротивления: внецентренное сжатие и изгиб с кручением.

1.1. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

Внецентренным сжатием (растяжением) называется такой случай сложного сопротивления, при котором линия действия сжимающей (растягивающей) силы не совпадает с осью стержня, а параллельна оси, т. е. внешние силы приложены к сечению с некоторым эксцентриситетом по отношению к центру тяжести сечения (рис. 1.1).

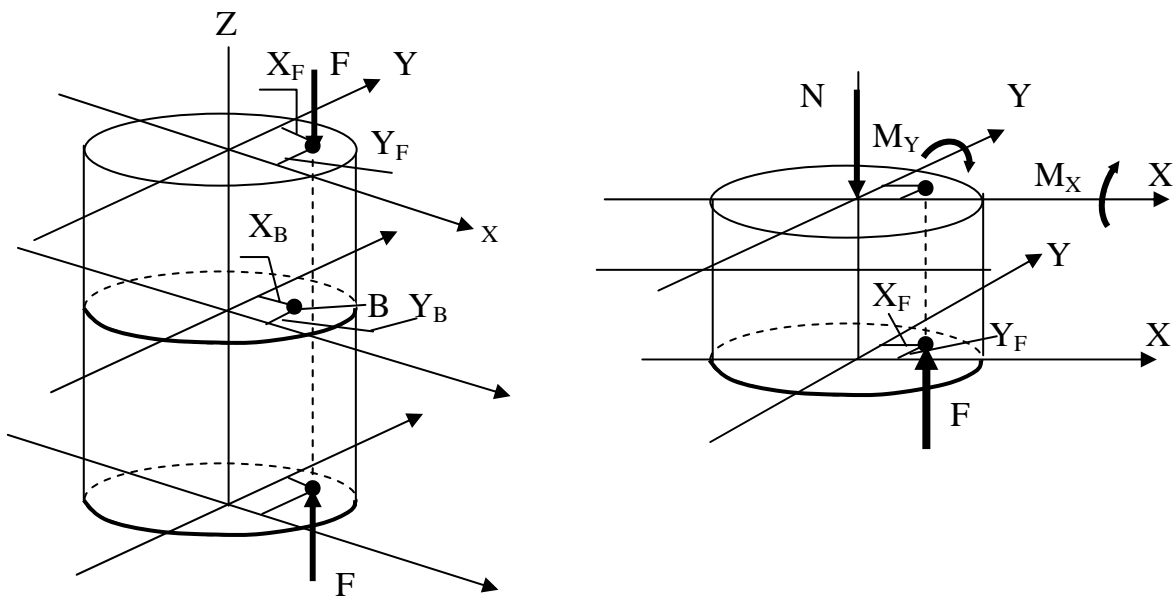


Рис. 1.1

Случай внецентренного сжатия широко встречается в практике проектирования строительных конструкций. Некоторые материалы (бетон, кирпичная кладка, чугун) могут воспринимать лишь незначительные растягивающие напряжения, а другие (например, грунт) вообще не работают на растяжение. При проектировании конструкций из этих материалов нельзя допускать появления растягивающих напряжений. Для выполнения этого требования нагрузка, действующая на брус, должна быть приложе-

на в пределах ядра сечения. Ядром сечения называют часть плоскости поперечного сечения, расположенную в окрестности центра тяжести, при приложении сжимающей (растягивающей) силы в которой напряжения в любой точке поперечного сечения будут одного знака. Чтобы в поперечном сечении возникали напряжения одного знака, нулевая линия должна располагаться либо вне поперечного сечения, либо должна быть касательной к поперечному сечению, что используется при определении границ ядра сечения.

Для определения напряжений в точке поперечного сечения бруса применяется принцип независимости действия сил. Напряжение в произвольной точке В определяется как алгебраическая сумма напряжений от действия в отдельности продольной силы и двух изгибающих моментов.

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sigma_B^N + \sigma_B^{M_x} + \sigma_B^{M_y}. \\ \sigma_B &= -\frac{N}{A} \pm \frac{M_x \cdot Y_B}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot X_B}{I_y}.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Для случая внецентренного растяжения перед первым членом надо поставить знак плюс. Если учесть, что $N = F$, $M_x = F \cdot Y_F$, $M_y = F \cdot X_F$, то формулу для определения напряжений можно записать в таком более удобном виде

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \left(1 \pm \frac{Y_F \cdot Y_B}{I_x} \pm \frac{X_F \cdot X_B}{I_y} \right).\quad (1.2)$$

Для записи условия прочности при внецентренном растяжении (сжатии) необходимо знать положение опасных точек в сечении. Такими точками для материала сопротивляющегося различно растяжению (сжатию) будут наиболее удаленные от нулевой линии точки в растянутой и сжатой зонах. Положение нулевой линии определяется отрезками a_x , a_y , отсекаемыми на главных центральных осях инерции нулевой линией.

Величины отрезков определяются по формулам:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{X_F}, \quad a_y = -\frac{i_x^2}{Y_F}.\quad (1.3)$$

Пусть координаты опасных точек в растянутой и сжатой областях будут соответственно $X_{раст}, Y_{раст}; X_{сжат}, Y_{сжат}$. Тогда условия прочности для этих точек будут

$$\begin{aligned}\sigma_{раст} &= -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{X_F \cdot X_{раст}}{i_y^2} + \frac{Y_F \cdot Y_{раст}}{i_x^2} \right) \leq [\sigma_p], \\ |\sigma_{сжат}| &= \left| -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{X_F \cdot X_{сжат}}{i_y^2} + \frac{Y_F \cdot Y_{сжат}}{i_x^2} \right) \right| \leq |-\sigma_c|.\end{aligned}\quad (1.4)$$

В (1.4) левая и правая часть второго неравенства взяты по модулю для того, чтобы не менять знак неравенства на противоположный. При этом надо помнить, что напряжения сжатия отрицательны. Если требуется определить наибольшую безопасную нагрузку, то очевидно она будет наименьшей из двух сил, полученных по этим условиям прочности. Ниже приводится пример решения задачи из контрольной работы.

ЗАДАЧА № 6

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис.1.2, сжимается продольной силой P , приложенной в точке A . Требуется: 1) вычислить наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через P и размеры сечения; 2) найти допустимую нагрузку P при заданных размерах сечения и допустимых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_c]=100$ МПа и на растяжение $[\sigma_p]=36$ МПа.

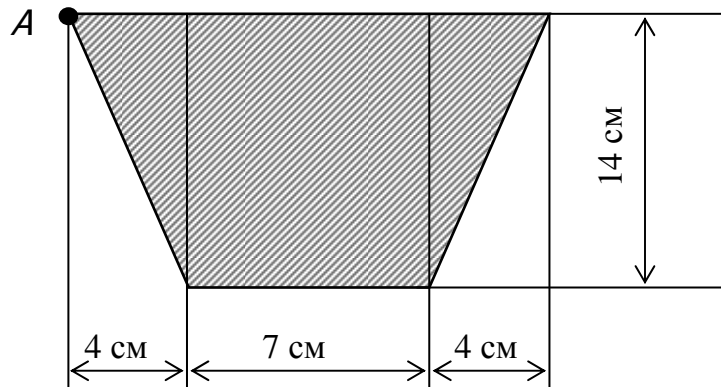


Рис. 1.2

Решение

1. Определение положения центра тяжести сечения.

Для определения координат центра тяжести сечения в случайных осях X и Y имеем следующие формулы:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}.$$

Сечение имеет одну ось симметрии (Y). Это центральная ось сечения Y_c (рис. 1.3). Поэтому в данном примере необходимо найти только положение центральной оси X_c . Разобьем сечение на простые фигуры, для которых известна площадь и положение центра тяжести. Очевидно это два одинаковых треугольника (фиг. 1) и прямоугольник (фиг. 2).

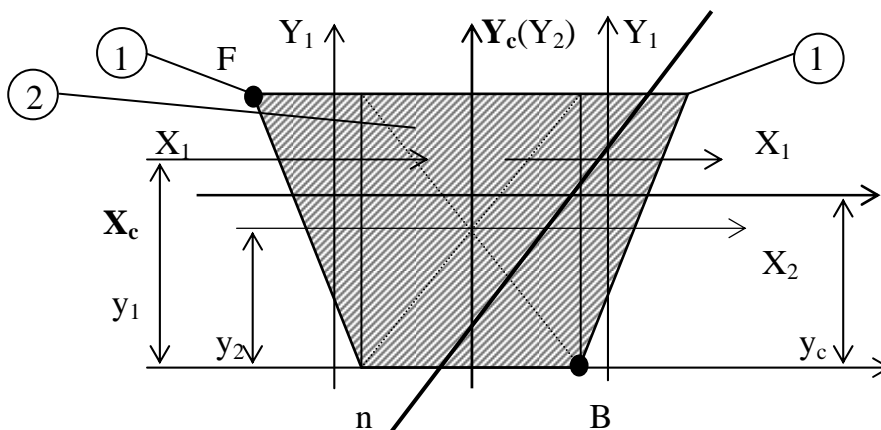


Рис. 1.3

$$\text{Имеем } y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{2S_{x1} + S_{x2}}{2A_1 + A_2} = \frac{2A_1 y_1 + A_2 y_2}{2A_1 + A_2}.$$

$$\text{Площади простых фигур: } A_1 = \frac{4 \cdot 14}{2} = 28 \text{ см}^2, \quad A_2 = 7 \cdot 14 = 98 \text{ см}^2.$$

Расстояния между центральными осями X_1, X_2 фиг.1 и 2 и случайной осью X :

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot 14 = 9,33 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{14}{2} = 7 \text{ см}. \text{ Тогда } y_c = \frac{2 \cdot 28 \cdot 9,33 + 98 \cdot 7}{154} = 7,85 \text{ см}. \text{ Откладывая}$$

это расстояние от оси X , найдем положение оси X_c . Так как ось Y_c – ось симметрии, а X_c – перпендикулярная ей центральная ось, то эти оси являются главными центральными осями инерции.

2. Определение величин главных центральных моментов инерции.

Определим величину главного центрального момента инерции относительно оси X_c . Имеем:

$$I_{xc}^{(1)} = I_{x1}^{(1)} + a_1^2 \cdot A_1, \quad I_{xc}^{(2)} = I_{x2}^{(2)} + a_2^2 \cdot A_2,$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 9,33 - 7,85 = 1,48 \text{ см}; \quad a_2 = y_2 - y_c = 7 - 7,85 = -0,85 \text{ см},$$

$$\text{где } I_{x1}^{(1)} = \frac{b_1 h^3}{36} = \frac{4 \cdot 14^3}{36} = 304,89 \text{ см}^4, \quad I_{x2}^{(2)} = \frac{b_2 h^3}{12} = \frac{7 \cdot 14^3}{12} = 1600,67 \text{ см}^4.$$

Тогда получим:

$$I_{xc}^{(1)} = 304,89 + (1,48)^2 \cdot 28 = 366,22 \text{ см}^4, \quad I_{xc}^{(2)} = 1600,67 + (-0,85)^2 \cdot 98 = 1671,48 \text{ см}^4. \text{ Окончательно } I_{xc} = 2 \cdot 366,22 + 1671,48 = 2403,92 \text{ см}^4.$$

Определим величину главного центрального момента инерции относительно оси Y_c . Имеем:

$$I_{yc} = 2I_{y1}^{(1)} + I_{y2}^{(2)}.$$

$$I_{y1}^{(1)} = I_{y1}^{(1)} + b_1^2 \cdot A_1, \quad I_{y2}^{(2)} = I_{y2}^{(2)} + b_2^2 \cdot A_2,$$

$$b_1 = x_1 - x_c = \frac{2}{3} \cdot 4 - 7,5 = -4,83 \text{ см}; \quad a_2 = y_2 - y_c = 7,5 - 7,5 = 0 \text{ см},$$

$$\text{где } I_{y1}^{(1)} = \frac{b_1 h^3}{36} = \frac{14 \cdot 4^3}{36} = 24,89 \text{ см}^4, \quad I_{y2}^{(2)} = \frac{b_2 h^3}{12} = \frac{14 \cdot 7^3}{12} = 400,17 \text{ см}^4.$$

Тогда получим:

$$I_{yc}^{(1)} = 24,89 + (-4,83)^2 \cdot 28 = 366,22 \text{ см}^4, \quad I_{yc}^{(2)} = 400,17 + (0)^2 \cdot 98 = 400,17 \text{ см}^4,$$

$$I_{yc} = 2 \cdot 366,22 + 400,17 = 1132,61 \text{ см}^4.$$

Определим квадраты радиусов инерции поперечного сечения.

$$i_X^2 = \frac{I_{xc}}{A} = \frac{2403,92}{154} = 15,61 \text{ см}^2, \quad i_Y^2 = \frac{I_{yc}}{A} = \frac{1132,61}{154} = 7,35 \text{ см}^2.$$

Для определения опасных точек в растянутой и сжатой областях поперечного сечения найдем положение нулевой линии. При внецентренном сжатии положение нулевой линии определяется отрезками a_X и a_Y , которые нулевая линия отсекает на главных центральных осях инерции X и Y соответственно.

$$a_X = -\frac{i_Y^2}{X_A}, \quad a_Y = -\frac{i_X^2}{Y_A}.$$

В этих формулах X_A и Y_A - координаты точки приложения силы (точка A).

По рис.1.3 имеем $X_A = -7,5 \text{ см}$, $Y_A = 6,15 \text{ см}$. Тогда получим:

$$a_x = -\frac{7,35}{(-7,5)} = 0,98 \text{ см}, \quad a_y = -\frac{15,61}{6,15} = 2,54 \text{ см}.$$

Так как в точке A приложена сжимающая сила, то сжатая область сечения будет располагаться выше нулевой линии, а растянутая область расположена ниже нулевой линии. Положение нулевой линии показано на рис. 1.3, из которого видно, что наиболее удаленные точки от нулевой линии в сжатой и растянутой областях будут соответственно точки A и B . Координаты точки A определены ранее. По рис.1.3 найдем координаты точки B . Имеем $X_B = 3,5 \text{ см}$, $Y_B = -7,85 \text{ см}$.

Запишем условие прочности для точки A

$$|\sigma_A| = \left| -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{X_A \cdot X_A}{i_Y^2} + \frac{Y_A \cdot Y_A}{i_X^2} \right) \right| \leq |[-\sigma_c]|.$$

Подставив значения, получим

$$|\sigma_A| = \frac{P_c}{154 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(-7,5) \cdot (-7,5)}{7,35} + \frac{6,15 \cdot 6,15}{15,61} \right) \leq 100 \cdot 10^3.$$

Откуда величина наибольшей допускаемой нагрузки из расчета на сжатие будет $P_c = 139,04 \text{ кН}$. Запишем условие прочности для точки B , в которой имеем наибольшие растягивающие напряжения

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{X_A \cdot X_B}{i_Y^2} + \frac{Y_A \cdot Y_B}{i_X^2} \right) \leq [\sigma_p].$$

Координаты точки B ($X_B = 3,5 \text{ см}$; $Y_B = -7,85 \text{ см}$).

$$\sigma_B = -\frac{P_p}{154 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(-7,5) \cdot (3,5)}{7,35} + \frac{6,15 \cdot (-7,85)}{15,61} \right) \leq 36 \cdot 10^3.$$

Откуда величина наибольшей допускаемой нагрузки из расчета на растяжение будет $P_p = 97,88 \text{ кН}$.

Окончательно принимаем в качестве наибольшей безопасной нагрузки на брус наименьшее из двух определенных значений нагрузки

$$P = \min\{P_p, P_c\} = P_p = 97,88 \text{ кН}.$$

1.2. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ.

Изгибом с кручением называется такой вид сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении стержня возникают изгибающий и крутящий момент. Для установления опасного сечения строятся эпюры изгибающих и крутящих моментов. Наиболее просто опасные точки в сечении определяются для брусков круглого поперечного сечения. В этом случае опасные точки располагаются в местах пересечения контура поперечного сечения с плоскостью действия результирующего изгибающего момента. Так как в опасных точках поперечного сечения бруса в этом случае нагружения реализуется плоское напряженное состояние, то для оценки прочности в опасной точке необходимо воспользоваться гипотезами прочности. Для пластичных мате-

риалов наиболее употребительными являются третья и четвертая гипотезы прочности.

Условия прочности по этим гипотезам для брусев круглого поперечного сечения имеют вид:

третья гипотеза прочности
$$\sigma_{расч}^{III} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (1.5)$$

четвертая гипотеза прочности
$$\sigma_{расч}^{IV} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (1.6)$$

Если нагрузка, действующая на брус, располагается в одной плоскости (например, в плоскости YOZ), то изгиб бруса будет происходить только в этой плоскости и отличным от нуля будет только изгибающий момент, действующий в этой плоскости (например, в плоскости YOZ $\rightarrow M_x$).

ЗАДАЧА № 7

На рис. 1.4 изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости, с прямыми углами в точках А и В. На стержень действует вертикальная нагрузка. Требуется: 1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов; 2) установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по четвертой гипотезе прочности. Дано: Схема рис. 1.4, $\alpha = 0,7$; $\beta = 1,3$.

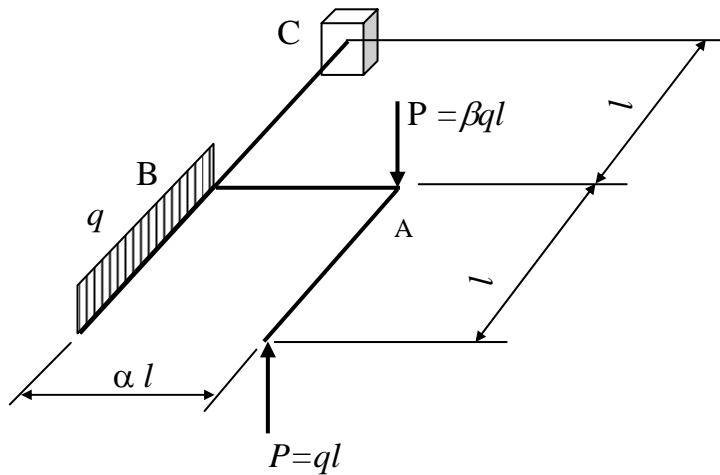


Рис. 1.4

Решение

1. Построение эпюр внутренних силовых факторов.

Разделим ломаный брус на четыре участка, в пределах каждого участка проведем сечение на расстоянии z_i от начала участка (рис. 1.5). Так как брус жестко заделан одним концом, а с другого конца свободен, то построение эпюр удобно проводить со свободного конца. В этом случае нет необходимости определять реакции в заделке (точка С).

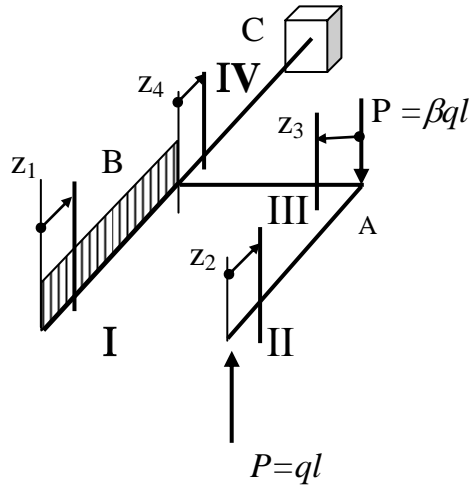


Рис. 1.5

Используя метод сечений для произвольного сечения на каждом участке, составим выражения для внутренних силовых факторов, используя которые, получим величины внутренних силовых факторов по концам участков.

Участок 1. ($0 \leq z_1 \leq l$), рис.1.6:

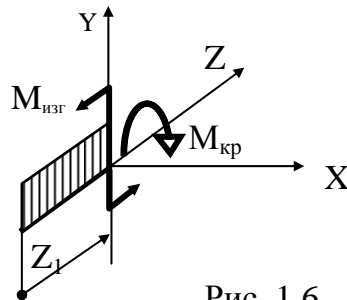


Рис. 1.6

$$\sum m_x = 0. \text{ Откуда получим } M_{изг}(z_1) = -\frac{qz_1^2}{2}. \quad M_{изг}(0) = 0, M_{изг}(l) = -\frac{ql^2}{2}.$$

$$\sum m_z = 0. \text{ Откуда получим } M_{кр}(z_1) = 0.$$

Участок 2. ($0 \leq z_2 \leq l$), рис. 1.7.

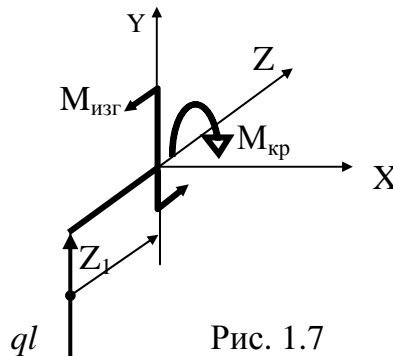


Рис. 1.7

$$\sum m_x = 0. \text{ Откуда получим } M_{изг}(z_2) = qlz_2. \quad M_{изг}(0) = 0, M_{изг}(l) = ql^2.$$

$$\sum m_z = 0. \text{ Откуда получим } M_{кр}(z_2) = 0.$$

Участок 3. ($0 \leq Z_3 \leq 0,7l$), рис. 1.8.

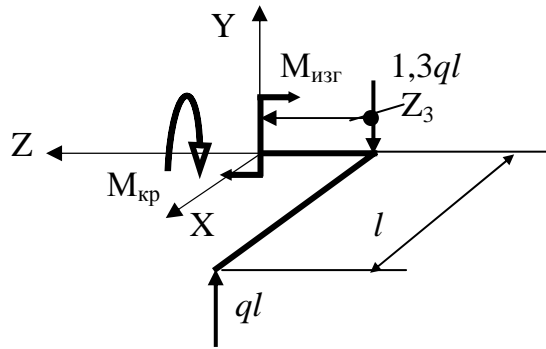


Рис. 1.8

$\sum m_x = 0$. Откуда получим $M_{u3z}(z_3) = q \cdot l \cdot z_3 - 1,3 \cdot q \cdot l \cdot z_3 = -0,3qlz_3$. $M_{u3z}(0) = 0$, $M_{u3z}(0,7l) = -0,21qlz_3$. $\sum m_z = 0$. Откуда получим $M_{кр}(z_3) = -q \cdot l \cdot l = -ql^2$.

Участок 4. ($0 \leq Z_4 \leq l$), рис. 1.9.

$\sum m_x = 0$. $q \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2} + z_4\right) + M_{u3z} + 1,3 \cdot q \cdot l \cdot z_4 - q \cdot l \cdot (l + z_4) = 0$.

Откуда получим $M_{u3z}(z_4) = q \cdot l \cdot (l + z_4) - 1,3 \cdot q \cdot l \cdot z_4 - q \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2} + z_4\right) =$
 $= \frac{q \cdot l^2}{2} - 1,3 \cdot q \cdot l \cdot z_4$. $M_{u3z}(0) = \frac{ql^2}{2}$, $M_{u3z}(l) = -0,8ql^2$.

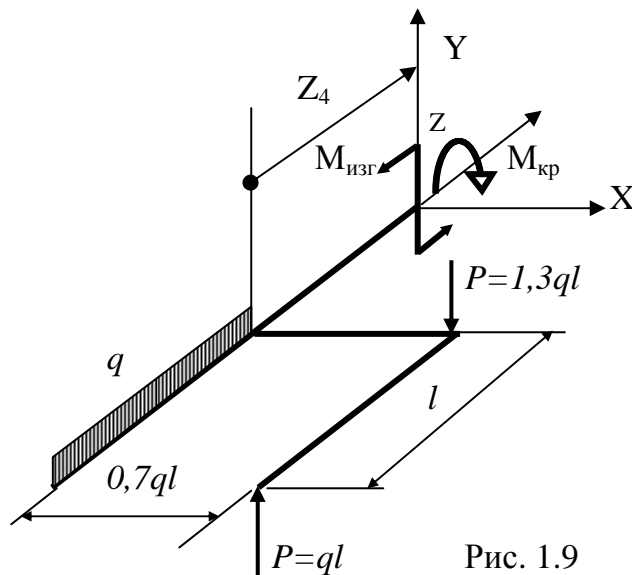


Рис. 1.9

$$\sum m_Z = 0. \quad M_{кр} + 1,3 \cdot q \cdot l \cdot 0,7 \cdot l - q \cdot l \cdot 0,7 \cdot l = 0$$

Откуда получим $M_{кр}(z_3) = -0,21ql^2$. Во всех сечениях 4-го участка крутящий момент постоянный.

По полученным выражениям на каждом участке строим эпюры изгибающих (рис. 1.10) и крутящих (рис. 1.11) моментов.

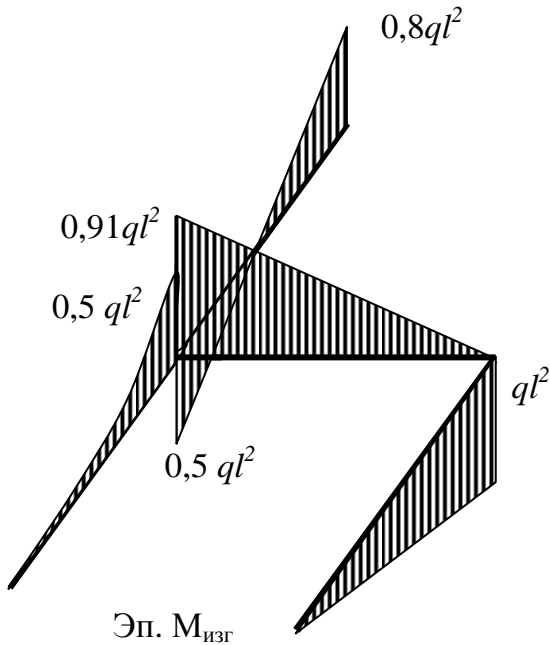


Рис. 1.10

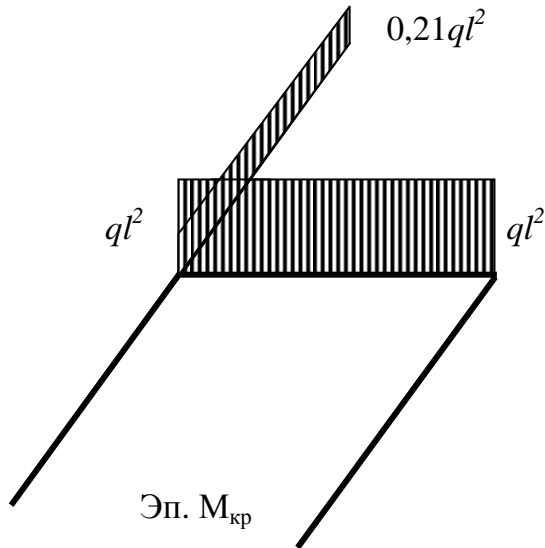


Рис. 1.11

2. Определение расчетного момента.

По эпюрам $M_{изг}$ и $M_{кр}$ видно, что опасное сечение в ломаном стержне находится в точке В на участке В-А: $M_{изг}=0,91ql^2$, $M_{кр}=ql^2$. Определим расчетный момент по IV-й гипотезе прочности. Имеем

$$M_{расч}^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75M_{кр}^2} = \sqrt{(0,91ql^2)^2 + 0,75 \cdot (ql^2)^2} = 1,256 ql^2.$$

2. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

Условие устойчивости прямолинейной формы изгиба стержня записывается в виде

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma_v] = \varphi[\sigma_{сжат}]. \quad (2.1)$$

Здесь φ - коэффициент продольного изгиба, учитывающий уменьшение допускаемого напряжения при осевом сжатии $[\sigma_{сжат}] = [\sigma]$. Он зависит от материала стержня и задается в зависимости от гибкости стержня λ :

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}, \quad (2.2)$$

где i_{\min} - радиус инерции сечения относительно оси наименьшей жесткости, l - длина стержня, μ - коэффициент приведения длины стержня, зависящий от закрепления стержня. По условию устойчивости расчет может быть:

а) проверочным

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi[\sigma], \quad (2.3)$$

б) на определение допускаемой нагрузки

$$[P] \leq \varphi \cdot A \cdot [\sigma], \quad (2.4)$$

в) проектировочным

$$A \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]}. \quad (2.5)$$

При проектировочном расчете приходится использовать метод последовательных приближений, так как в начале расчета значение φ , зависящее от λ , а следовательно и от размеров поперечного сечения стержня, неизвестно.

Величина критической силы $P_{кр}$, действующей на стержень, равна

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A, \quad (2.6)$$

где критическое напряжение $\sigma_{кр}$ определяют по одной из формул:

а) при $\lambda \geq \lambda_{пред}$ по формуле Эйлера

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (2.7)$$

б) при $\lambda < \lambda_{пред}$ по формуле Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2, \quad (2.8)$$

где a, b, c – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала стержня. Они приводятся в соответствующих таблицах. Так для стали ст. 3 имеем $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$, $c = 0$.

Коэффициент запаса устойчивости определяется по формуле

$$n_{уст} = \frac{P_{кр}}{P}. \quad (2.9)$$

Ниже приводится пример решения задачи из контрольной работы.

Задача № 8

Стальной стержень длиной l сжимается силой P . Требуется: 1) найти размеры поперечного сечения при допуске напряжении на простое сжатие $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом $\varphi = 0,5$); 2) найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Дано: $l = 1 \text{ м}$, $P = 1200 \text{ кН}$. Схема закрепления концов стержня и форма сечения стержня представлены на рис. 2.1 .

Решение

Вначале решения задач такого рода удобно вычислить все необходимые геометрические характеристики поперечного сечения стойки, выразив их через неизвестный параметр, характеризующий размер стороны сечения.

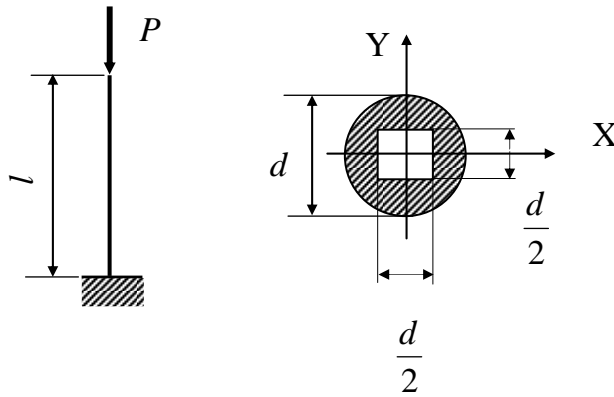


Рис. 2.1

1) Геометрия сечения.

$$\text{Площадь поперечного сечения } A = \frac{\pi d^2}{4} - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0,535 d^2.$$

Выразим характерный размер d сечения через площадь сечения:

$$d = \sqrt{\frac{A}{0,535}} = 1,367\sqrt{A}.$$

Осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей инерции (осей симметрии):

$$I_x = I_y = I = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}{12} = 0,0052 d^4.$$

$$\text{Радиусы инерции сечения: } i_x = i_y = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{0,0052 d^4}{0,535 d^2}} = 0,0986 d.$$

Условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi A} \leq [\sigma].$$

Решение задачи проводим методом последовательных приближений (методом попыток).

Первая попытка. Примем коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$. Из условия устойчивости определим требуемую площадь поперечного сечения стержня:

$$A = \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{1200}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^3} = 0,015 \text{ м}^2.$$

Характерный размер поперечного сечения $d = 1,367\sqrt{A} = 0,167 \text{ м}^2$.

Радиус инерции сечения $i = 0,0986 d = 0,0165 \text{ м}$.

Определим гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{2 \cdot 1}{0,0165} = 121$.

По таблице для коэффициентов продольного изгиба находим интерполяцией

$$\varphi_2 = 0,40 + \frac{(0,45 - 0,40)}{10} \cdot 9 = 0,445.$$

Проверим выполнение условия устойчивости

$$\sigma = \frac{P}{\varphi_2 A} = \frac{1200}{0,445 \cdot 0,015} = 179,8 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Так как условие устойчивости не выполняется, делаем вторую попытку.

Вторая попытка. Примем

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{0,5 + 0,445}{2} = 0,472.$$

$$A = \frac{1200}{0,472 \cdot 160 \cdot 10^3} = 0,0159 \text{ м}^2; \quad d = 1,367 \sqrt{A} = 0,172 \text{ м}; \quad i = 0,0986 \cdot d = 0,017 \text{ м};$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{2 \cdot 1}{0,017} = 118. \quad \text{По таблице определяем } \varphi_4 = 0,45 + \frac{(0,52 - 0,45)}{10} \cdot 2 = 0,464.$$

$$\text{Проверим выполнение условия устойчивости: } \sigma = \frac{P}{\varphi_4 A} = \frac{1200}{0,464 \cdot 0,0159} = 162,6 \text{ МПа}.$$

$$\text{Имеет место перенапряжение на } \Delta \sigma \% = \frac{|\sigma - [\sigma]|}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{|162,6 - 160|}{160} \cdot 100 \% = 1,6 \% < 5 \%.$$

Далее алгоритм решения задачи полностью повторяется.

Таким образом условие устойчивости удовлетворяется. Окончательно принимается $d=17 \text{ см}$. Определим коэффициент запаса устойчивости n_y для этой стойки. По определению $n_y = \frac{P_{кр}}{P}$, где P – величина наибольшей безопасной нагрузки, действующей

на стойку (в нашей задаче $P=1200 \text{ кН}$), а $P_{кр}$ – величина критической силы для стойки. Так как в нашем случае гибкость стойки $\lambda=118$, что больше гибкости $\lambda_0=100$ для материала стойки Ст.3, то определение критической силы проводим по формуле Эйлера.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}.$$

Для сплошного круглого сечения стойки имеем:

$$I_{\min} = 0,0052 d^4 = 0,0052 \cdot (0,17)^4 = 4,34 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

$$\text{Тогда } P_{кр} = \frac{(3,14)^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 4,34 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot 1)^2} = 2139,5 \text{ кН}.$$

Стойка имеет коэффициент запаса устойчивости, равный

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{2139,5}{1200} = 1,78.$$

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

При динамическом нагружении в элементах конструкций возникают значительные ускорения и связанные с ними силы инерции, которые необходимо учитывать при расчетах на прочность. Учет динамического воздействия нагрузки обычно проводится введением динамического коэффициента в полученное решение соответствующей статической задачи. Для различных динамических задач выражения для динамического коэффициента имеют различный вид. В контрольную работу заочников включена задача на удар, в результате падения груза на балку.

3.1. Расчеты на удар

В основу прикладной теории удара положены следующие основные допущения:

- удар точечный (соударение падающего груза и элемента конструкции происходит в точке),
- удар абсолютно неупругий (падающий груз при ударе как бы прилипает к элементу конструкции – нет отскока),
- при ударе справедлив закон сохранения энергии.

Величина любого фактора $\Phi_{дин}$ (усилие, перемещение) при ударе может быть получена из следующего соотношения

$$\Phi_{дин} = \Phi_{статич} \cdot K_{д},$$

где $\Phi_{статич}$ – величина интересующего нас фактора, полученная при решении задачи статики при статическом приложении величины падающего груза. $K_{д}$ – динамический коэффициент при ударе, определяемый по формуле

$$K_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{ст}}},$$

где h – высота, с которой падает груз; $\Delta_{ст}$ – перемещение в элементе конструкции в точке соударения по направлению падающего груза, при статическом приложении его величины.

Ниже приводится пример решения типовой задачи из контрольной работы для студентов-заочников.

ЗАДАЧА № 9

На двутавровую балку, свободно лежащую на двух жестких опорах (рис. 3.1) с высоты h падает груз P . Требуется: 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке; 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой равна α ; 3) сравнить полученные результаты.

Дано: Схема рис. 3.1, $l = 2,8 \text{ м}$; $P = 500 \text{ Н}$; $h = 6 \text{ см}$; $\alpha = 22 \cdot 10^{-3} \frac{\text{М}}{\text{кН}}$. Поперечное сечение балки прокатный двутавр № 20.

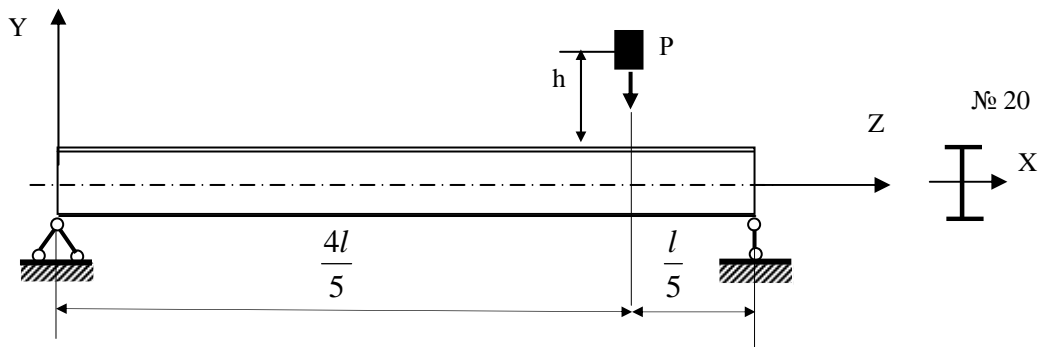


Рис. 3.1

Решение

Рассмотрим решение задачи, когда обе опоры жесткие. Наибольшие напряжения в балке определим по формуле

$$\sigma^D_{\max} = \sigma^{CT}_{\max} \cdot K_D,$$

где σ^D_{\max} – наибольшие напряжения в опасном сечении балки при ударе; σ^{CT}_{\max} – наибольшие напряжения в балке при статическом приложении величины падающего груза P , K_D – динамический коэффициент при ударе, в результате падения груза P , определяемый по формуле $K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{CT}}}$, где h – высота с которой падает груз; Δ_{CT} –

прогиб балки от действия сосредоточенной силы P , приложенной статически в сечении соударения груза и балки. Для определения положения опасного сечения и величины наибольших нормальных напряжений построим в балке эпюру изгибающих моментов рис. 3.2. Определим опорные реакции в балке. Для этого запишем сумму моментов относительно опорных шарниров А и В.

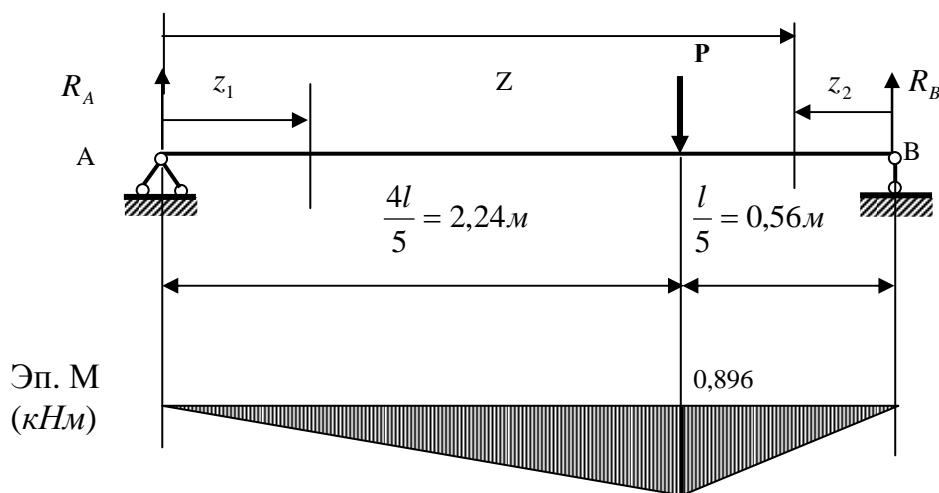


Рис. 3.2

$$\sum m_B = 0; \quad R_A \cdot l - P \cdot \frac{l}{5} = 0; \quad R_A = \frac{P}{5} = 100 \text{ Н},$$

$$\sum m_A = 0; \quad R_B \cdot l - P \cdot \frac{4l}{5} = 0; \quad R_B = \frac{4P}{5} = 400 \text{ Н}.$$

Проверим полученные реакции $\sum Y = 100 + 400 - 500 \equiv 0$. Составим выражение для изгибающего момента на первом участке $M_1 = R_A z_1$, при $z_1 = 2,24 \text{ м}$ получим $M_{\max} = 896 \text{ Нм} = 0,896 \text{ кНм}$. Из сортамента для прокатного двутавра № 20 имеем $I_x = 1840 \text{ см}^4$, $W_x = 184 \text{ см}^3$. Найдем наибольшие напряжения в опасном сечении

$$\sigma_{\max}^{CT} = \frac{M_{\max}^{CT}}{W_x} = \frac{0,896}{184 \cdot 10^{-6}} = 4,87 \text{ МПа}.$$

Для определения динамического коэффициента определим в балке прогиб под силой P . Для этого воспользуемся методом начальных параметров. В начале координат прогиб на опоре А равен нулю. Запишем выражение для прогиба в произвольном сечении последнего участка балки.

$$EI_x V_Y(z) = EI_x \phi_0 z + R_A \frac{z^3}{6} - P \frac{(z - 2,24)^3}{6}.$$

Найдем неизвестный начальный параметр (угол поворота в начале координат) ϕ_0 из условия, что прогиб на правой опоре В равен нулю.

$$EI_x V_Y(2,8) = EI_x \phi_0 \cdot 2,8 + R_A \frac{2,8^3}{6} - P \frac{(2,8 - 2,24)^3}{6} = 0.$$

$$\text{Откуда получим } EI_x \phi_0 = \left(-100 \frac{2,8^3}{6} + 500 \frac{(0,56)^3}{6} \right) \frac{1}{2,8} = -125,44.$$

Полагая, что $z = 2,24 \text{ м}$, найдем прогиб под силой P

$$\Delta_{CT} = EI_x V_Y(2,24) = -125,44 \cdot 2,24 + 100 \cdot \frac{2,24^3}{6} = -93,66.$$

Знак минус указывает на то, что прогиб вниз. Далее получим

$$\Delta_{CT} = \frac{93,66}{2 \cdot 10^8 \cdot 1840 \cdot 10^{-6}} = 0,000254 \text{ м}.$$

Определим динамический коэффициент

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,06}{0,000254}} = 22,76.$$

Тогда наибольшие динамические напряжения при ударе будут

$$\sigma_{\max}^D = 4,87 \cdot 22,76 = 110,84 \text{ МПа}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда правая опора представляет собой пружину. В этом случае схема перемещений сечений балки будет иметь вид рис. 3.3.

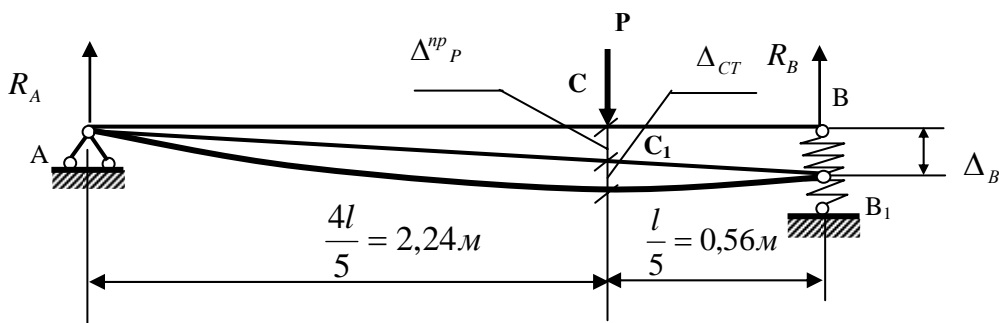


Рис. 3.3

Полное перемещение точки приложения груза в этом случае равно

$$\Delta_{\text{полн}} = \Delta^{\text{np}}_P + \Delta_{\text{CT}}.$$

Величина прогиба балки в точке статического приложения падающего груза Р вычислена ранее и равна $\Delta_{\text{CT}} = 0,0016 \text{ м}$. Величину перемещения точки С балки за счет осадки пружины Δ^{np}_P найдем из подобия треугольников ACC_1 и ABB_1 . Запишем следующие соотношения: $\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC}{AB}$, $BB_1 = \Delta_B = R_B \cdot \alpha = 0,4 \cdot 22 \cdot 10^{-3} = 8,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,88 \text{ см}$.

Далее $\Delta^{\text{np}}_P = CC_1 = \frac{AC}{AB} BB_1 = \frac{2,24}{2,8} 0,88 = 0,7 \text{ см}$. Величина полного перемещения балки в точке удара будет $\Delta_{\text{полн}} = \Delta^{\text{np}}_P + \Delta_{\text{CT}} = 0,7 + 0,025 = 0,725 \text{ см}$.

Вычислим динамический коэффициент в этом случае

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{полн}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 6}{0,725}} = 5,19.$$

Тогда наибольшие динамические напряжения в опасном сечении балки будут $\sigma^{\text{д}}_{\text{max}} = 4,87 \cdot 5,19 = 25,28 \text{ МПа}$. Таким образом, в результате замены правой жесткой опоры на пружину наибольшие динамические напряжения в опасном сечении балки уменьшились в $\frac{110,84}{25,28} \approx 4,4$ раза.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ
(ЧАСТЬ II)

Методические указания по курсу "Соппротивление материалов" для студентов строительных специальностей заочной формы обучения

Леонид Матвеевич Иванников

Главный редактор	<i>Л. А. Суевалова</i>
Редактор	<i>В. Н. Косенко</i>
Компьютерная верстка	<i>Л. М. Иванникова</i>

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.

Бумага писчая. Гарнитура "Таймс". Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,16. Уч.- изд.л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство Хабаровского государственного технического университета. 680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

Отдел оперативной полиграфии издательства Хабаровского государственного технического университета.

680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.